SOLUZIONE PROBLEMA 1 P.N.I.

a. Avendo posto $\overline{AP}=x$, si osserva che il problema ha significato per $0\le x\le 2$, dove i casi limite si riferiscono ai casi in cui il punto P coincide con gli estremi del diametro, per cui una delle due semicirconferenze degenera in un punto e l'altra coincide con quella di partenza; in tal caso l'area dell'arbelo diventa pari a 0.

Essendo $\overline{PB}=2-x$, calcoliamo le aree che interessano per determinare la funzione cercata.

$$area(semicerchioAP)=\frac{\pi}{8}x^2$$

$$area(semicerchioPB)=\frac{\pi}{8}(2-x)^2$$

$$area(semicerchioAB)=\frac{\pi}{2}$$

$$area(arbelo)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(2-x)^2-\frac{\pi}{8}x^2=\frac{\pi}{8}\left(\cancel{4}-\cancel{4}+4x-x^2-x^2\right)=\frac{\pi}{4}\left(2x-x^2\right)$$

La funzione cercata sarà pertanto:

$$y=f(x)=\frac{\frac{\pi}{4}\left(2x-x^2\right)}{\frac{\pi}{8}\left(2x^2-4x+4\right)}=\frac{2x-x^2}{x^2-2x+2}$$

b. Studiamo la funzione.

- dominio

  E' necessario porre che il denominatore sia diverso da zero: $x^2-2x+2\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

  Dunque $dom(f(x))=\mathbb{R}$.

- simmetrie

  Poiché x compare nell'espressione della funzione sia elevato a 1, sia elevato a 2, la funzione non può essere né pari né dispari, per cui il suo grafico non presenta simmetrie elementari.

- intersezioni con gli assi cartesiani

  asse y: $\begin{cases} x=0 \\ y=f(0)=0 \end{cases}$ $\qquad O(0;0)$

  asse x: $\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{2x-x^2}{x^2-2x+2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \vee x=2 \end{cases}$ $\qquad A(2;0)$

- segno

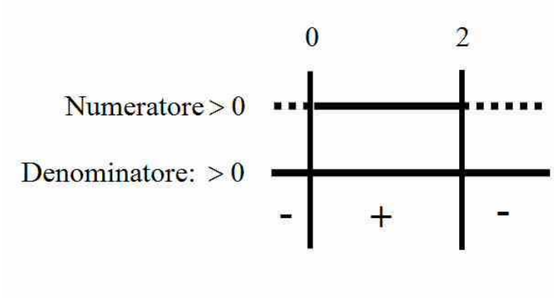
  $f(x)>0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{2x-x^2}{x^2-2x+2}>0$

Studiamo separatamente numeratore e denominatore.

$N > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < 2$

$D > 0 \quad \rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Riassumiamo lo studio del segno nel seguente schema:



- comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-x^2}{x^2-2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = -1$$

Dunque il grafico presenta un asintoto orizzontale completo di equazione $y=-1$.

- derivata prima, punti stazionari

$$f'(x) = \frac{(2-2x)\left(x^2-2x+2\right)-\left(2x-x^2\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2} = \frac{(2-2x)\left(\cancel{x^2}-\cancel{2x}+2+\cancel{2x}-\cancel{x^2}\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2} = \frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

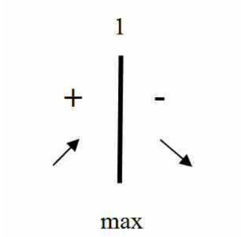
Si nota immediatamente che $dom(f'(x)) = dom(f(x)) = \mathbb{R}$, per cui la funzione risulta ovunque derivabile.

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

Si ha dunque un punto stazionario in $M(1;1)$.

- crescita, decrescita, massimi e minimi

$f'(x)>0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\cancel{4}(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}>0 \quad \rightarrow \quad x<1$, avendo osservato che il denominatore è sempre positivo. Riassumiamo lo studio della derivata prima nel seguente schema:



La funzione presenta pertanto in M un punto di massimo assoluto; essa è pure limitata inferiormente dall'estremo inferiore -1.

- derivata seconda, concavità, flessi

$$f''(x)=4\frac{-\left(x^2-2x+2\right)^2-2\left(x^2-2x+2\right)(2x-2)(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^4}=$$

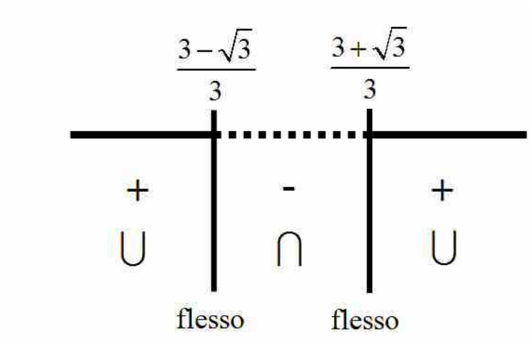
$$=-4\frac{\cancel{\left(x^2-2x+2\right)}\left(x^2-2x+2+4x-4x^2-4+4x\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^{\cancel{4}3}}=$$

$$=-4\frac{-3x^2+6x-2}{\left(x^2-2x+2\right)^3}=\frac{4\left(3x^2-6x+2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^3}$$

$$f''(x)\geq 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\cancel{4}\left(3x^2-6x+2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^3}\geq 0 \quad\rightarrow\quad 3x^2-6x+2\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\leq\frac{3-\sqrt{3}}{3}\vee x\geq\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

Dove si è osservato che il fattore a denominatore è sempre positivo.

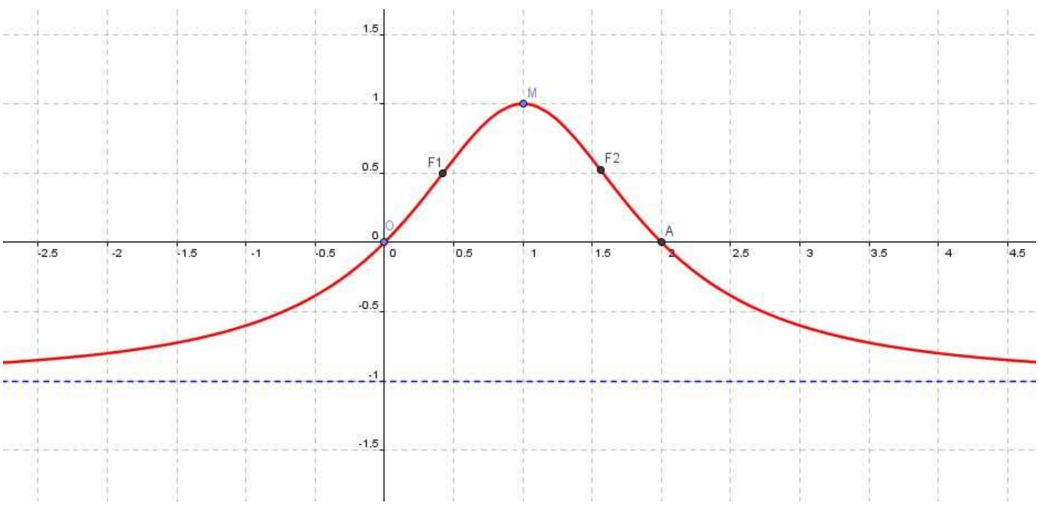
Riassumiamo lo studio della derivata seconda nel seguente schema:



Il grafico della funzione presenta pertanto due punti di flesso:

$$F_1\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{1}{2}\right) \text{ e } F_2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3};\frac{1}{2}\right)$$

- grafico



c. La funzione assume un massimo pari a 1 per $x=1$. In questo caso il punto P si trova esattamente nel centro della semicirconferenza di partenza, per cui le altre due semicirconferenze sono uguali e, essendo il rapporto pari a 1, l'area dell'arbelo è uguale alla somma delle aree dei due semicerchi.

La funzione è simmetrica perché simmetrico è il problema rispetto alla situazione appena descritta.

d. Per ottenere una funzione pari e avente come asintoto orizzontale l'asse x, a partire dalla funzione data, è sufficiente definire una traslazione che sposti il grafico in alto di 1 e a sinistra di 1; dunque la traslazione di vettore $\vec{v}(-1;1)$, di cui scriviamo le equazioni:

$$\tau_{\vec{v}}:\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+1 \end{cases}.$$

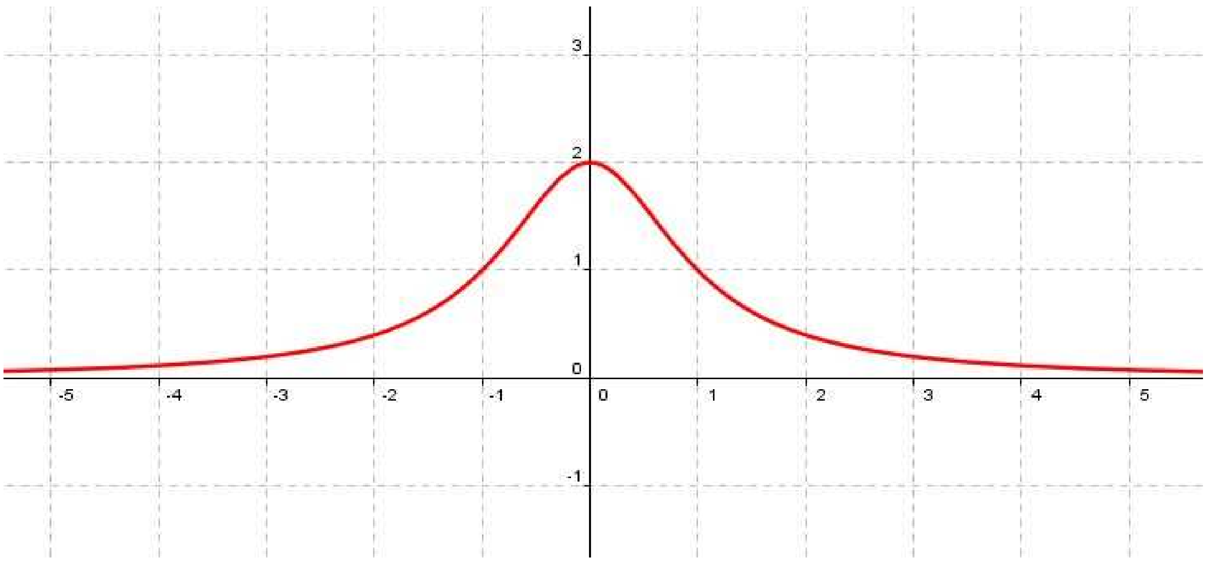
La trasformazione inversa sarà pertanto: $\tau_{\vec{v}}^{-1}:\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'-1 \end{cases}$.

Sostituiamo tali equazioni nell'espressione della funzione, per trovare la sua trasformata.

$$y=\frac{2x-x^2}{x^2-2x+2}\xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} y-1=\frac{2(x+1)-(x+1)^2}{(x+1)^2-2(x+1)+2} \quad\rightarrow$$

$$y=\frac{\cancel{2x}+2-x^2-\cancel{2x}-1}{x^2+\cancel{2x}+1-\cancel{2x}-\cancel{2}+\cancel{2}}+1 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}+1}{x^2+1} \quad\rightarrow\quad y=\frac{2}{x^2+1}$$

Di quest'ultima funzione $y=g(x)$ è immediato verificare che soddisfa alle richieste. Disegniamone il grafico.



e. Dal momento che la traslazione è un'isometria e quindi trasforma il grafico di $f(x)$ in una figura congruente, risulta più facile ed equivalente calcolare l'area compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x.

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+x^2}dx=\lim_{k\to+\infty}\left[2\arctan x\right]_{-k}^{k}=\lim_{k\to+\infty}\left(2\arctan k-2\arctan(-k)\right)=4\lim_{k\to+\infty}\arctan k=4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$$