SOLUZIONE PROBLEMA 1 TRADIZIONALE

a. La curva in questione rappresenta graficamente una funzione poiché è evidente che ad ogni valore di *x* corrisponde al massimo un valore di *y*, ovvero, presa una qualsiasi retta verticale, essa interseca il grafico al massimo una volta.

Dalla figura si deduce che i tre archi in questione appartengono rispettivamente alla circonferenza Γ_1, centrata nell'origine e avente raggio 1, alla circonferenza Γ_2, centrata in $K(0;-1)$ e avente raggio 2, e alla circonferenza Γ_3, centrata in $Q(1;0)$ e avente raggio pari alla distanza *QC*, che calcoleremo.

Calcoliamo le equazione delle tre circonferenze.

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$\Gamma_2 : x^2 + (y+1)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$

Il punto *C* è l'intersezione tra la retta $r : y = x - 1$ e Γ_2.

$$C : \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad C\left(\sqrt{2}; \sqrt{2} - 1\right)$$

Dunque $\overline{QC} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2} = 2 - \sqrt{2}$

$$\Gamma_3 : (x-1)^2 + y^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 5 + 4\sqrt{2} = 0$$

Risulta quindi anche $D\left(3 - \sqrt{2}; 0\right)$.

E' possibile trovare la rappresentazione dei tre archi esplicitando le equazioni rispetto a *y*.

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

$$\overset{\frown}{BC} : \begin{cases} y = -1 + \sqrt{4 - x^2} \\ 0 < x \le \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\overset{\frown}{CD} : \begin{cases} y = \sqrt{-x^2 + 2x + 5 - 4\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} < x \le 3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

La rappresentazione analitica della funzione cercata è pertanto:

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & se \quad -1 \le x \le 0 \\ -1 + \sqrt{4 - x^2} & se \quad 0 < x \le \sqrt{2} \\ \sqrt{-x^2 + 2x + 5 - 4\sqrt{2}} & se \quad \sqrt{2} < x \le 3 - \sqrt{2} \end{cases} ,$$

il cui campo di esistenza è $domf(x)=\left[-1;3-\sqrt{2}\right]$ e l'insieme delle immagini $immf(x)=[0;1]$.

b. Si ha:

$$D\left(\sqrt{1-x^2}\right)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=f_1'(x)$$

$$D\left(-1+\sqrt{4-x^2}\right)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=f_2'(x)$$

$$D\left(\sqrt{-x^2+2x+5-4\sqrt{2}}\right)=\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+5-4\sqrt{2}}}=f_3'(x)$$

La funzione risulta derivabile certamente nei punti interni di ciascuno dei tre intervalli.

E' necessario verificarne la derivabilità negli estremi, calcolando i limiti delle tre espressioni appena ottenute:

- $\lim\limits_{x\to-1^+} f_1'(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$, dunque in A la funzione non è derivabile e il grafico presenta tangente verticale;
- $\lim\limits_{x\to0^-} f_1'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=0$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f_2'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right]=0$, dunque, per l'uguaglianze dei due limiti, la funzione in B è derivabile e il grafico presenta tangente orizzontale; si tratta quindi di un punto stazionario di massimo assoluto;
- $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f_2'(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}\left[-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right]=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$ e

  $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f_3'(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+5-4\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}+5-4\sqrt{2}}}=$
  $=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=-1$; dunque anche in tal caso la funzione risulta derivabile e il grafico presenta in C un punto in cui la tangente ha coefficiente angolare pari a -1;
- $\lim\limits_{x\to(3-\sqrt{2})^-} f_3'(x)=\lim\limits_{x\to(3-\sqrt{2})^-}\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+5-4\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{-9-2+6\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}+5-4\sqrt{2}}}=$
  $=\frac{\sqrt{2}-2}{0^+}=-\infty$;

  dunque in D la funzione non è derivabile e il grafico ha tangente verticale.

c. Il grafico di $f(x)$ è l'unione di tre archi di circonferenza di cui è possibile calcolare le lunghezze:

- $\overset{\frown}{AB}$ è un quarto di circonferenza di raggio 1 e avrà pertanto lunghezza $l_{AB} = \frac{\pi}{2}$
- $\overset{\frown}{BC}$ è un ottavo di circonferenza (corrisponde all'angolo al centro $B\hat{K}C = 45°$) di raggio 2 e avrà pertanto lunghezza $l_{BC} = \frac{\pi}{2}$
- $\overset{\frown}{CD}$ è un ottavo di circonferenza (corrisponde all'angolo al centro $C\hat{Q}D = 45°$) di raggio $2-\sqrt{2}$ e avrà pertanto lunghezza $l_{CD} = \frac{\pi}{4}\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

La lunghezza dell'ovale sarà pertanto $l = 2\left(l_{AB} + l_{BC} + l_{CD}\right) = \pi\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

L'area racchiusa dall'ovale è il doppio di quella compresa tra il grafico dato e l'asse *x*. Calcoliamo dunque quest'ultima:

- il settore circolare *AOB* è un quarto di cerchio di raggio 1, per cui la sua area vale $area(AOB) = \frac{\pi}{4}$
- l'area del quadrilatero mistilineo *BOQC* è data dalla differenza tra l'area del settore circolare *BKC* e quella del triangolo *OKQ*, per cui $area\left(BOQC\right) = area(BKC) - area(OKQ) = \frac{\pi}{8}\cdot 4 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$
- il settore circolare *CQD* è un ottavo di cerchio di raggio $2-\sqrt{2}$, per cui la sua area vale $area(CQD) = \frac{\pi}{8}\left(2-\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\left(6-4\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$

L'area cercata sarà pertanto:

$$area(ovale) = 2\left(area(AOB) + area(BOQC) + area(CQD)\right) = \pi\left(3-\sqrt{2}\right) - 1$$

Il volume cercato può essere calcolato sommando al volume $V_1 = \frac{2}{3}\pi$ relativo alla semisfera che si ottiene ruotando il settore circolare *AOB*, quello che si calcola mediante la formula $V_2 = \pi \int_0^{3-\sqrt{2}} \left[f(x)\right]^2 dx$. Poiché la funzione è definita per casi, è possibile applicare la proprietà additiva all'integrale e scriverlo come somma dei seguenti integrali nei due restanti intervalli in cui la funzione cambia definizione:

$$V_2=\pi\int_0^{3-\sqrt{2}}[f(x)]^2\,dx=\pi\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left(-1+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx+\int_{\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}}\left(-x^2+2x+5-4\sqrt{2}\right)dx\right]=$$

$$\pi\left\{\int_0^{\sqrt{2}}\left(5-x^2-2\sqrt{4-x^2}\right)dx+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+5x-4\sqrt{2}x\right]_{\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}}\right\}$$

Calcoliamo separatamente l'integrale $I=\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$, mediante la sostituzione di variabile $x=2\sin t$, che implica che $\sqrt{4-x^2}=2\cos t$ e che $dx=2\sin t dt$. Gli estremi di integrazione diventano, nell'ordine, pari a 0 e $\frac{\pi}{4}$.

Si avrà quindi: $I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=4\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=4\left[\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right]=\frac{\pi}{2}+1.$

Pertanto:

$$V_2=\pi\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left(-1+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx+\int_{\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}}\left(-x^2+2x+5-4\sqrt{2}\right)dx\right]=$$

$$\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}-\pi-2+\left[-\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}{3}+\left(3-\sqrt{2}\right)^2+5\left(3-\sqrt{2}\right)-4\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2+5\sqrt{2}-8\right)\right]_{\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}}\right\}=$$

$$\pi\left\{5\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\pi-2-15+\frac{29}{3}\sqrt{2}+11-6\sqrt{2}+15-5\sqrt{2}-12\sqrt{2}+8+\frac{2\sqrt{2}}{3}-2-5\sqrt{2}+8\right\}=$$

$$\pi\left(23-\frac{40}{3}\sqrt{2}-\pi\right)$$