

SOLUZIONE PROBLEMA 2 P.N.I.

- a. La generica funzione f_n ha come dominio $dom(f_n(x)) = [0; +\infty)$, ma per $x=0$ ha una definizione diversa rispetto agli altri punti. Studiamo la continuità da destra.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(n + \ln x) = 0 \cdot (-\infty) \quad (\text{forma indeterminata})$$

Il limite può essere calcolato mediante il teorema di De l'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n + \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f_n(0)$$

Dunque la funzione è continua da destra per $x=0$. Negli altri punti del suo dominio è senza dubbio continua, in quanto prodotto di due funzioni continue.

Calcoliamo la derivata.

$$f_n'(x) = n + \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = n + 1 + \ln x$$

Tale espressione è vera solo per $x > 0$. Essendo però la funzione continua in 0 e derivabile in un suo intorno destro, se il limite destro della derivata prima esistesse finito, potremmo comunque affermarne la derivabilità destra anche in 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (n + 1 + \ln x) = -\infty$$

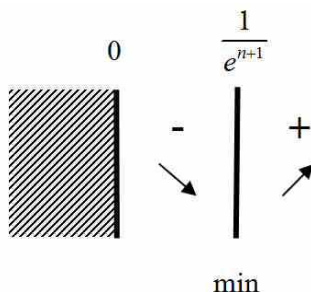
Dunque la funzione non è derivabile in 0 e il suo grafico assume in tal punto tangente verticale.

Negli altri punti la funzione è certamente derivabile.

- b. Studiamo il segno della derivata prima.

$$f_n'(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad n + 1 + \ln x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \ln x \geq -(n+1) \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{1}{e^{n+1}}$$

Riassumiamo lo studio della derivata prima nel seguente schema:



Le funzioni presentano dunque un minimo assoluto nel punto variabile $M_n \left(\frac{1}{e^{n+1}}; -\frac{1}{e^{n+1}} \right)$.

Le ascisse dei punti di minimo costituiscono dunque una progressione geometrica avente il primo termine $a_0 = \frac{1}{e}$ e ragione $r = \frac{1}{e}$.

Le loro ordinate costituiscono una progressione geometrica avente il primo termine $b_0 = -\frac{1}{e}$ e ragione $r = \frac{1}{e}$.

- c. Sia $f_{n+1}(x) = x(n+1 + \ln x)$ e determiniamo le coordinate dei suoi punti di intersezione con l'asse x .

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(n+1 + \ln x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{e^{n+1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Dunque si hanno due punti di intersezione, di cui uno è appunto l'origine e l'altro è il punto di coordinate variabili $P_n\left(\frac{1}{e^{n+1}}; 0\right)$.

L'ascissa di P_n coincide con quella di M_n .

- d. L'omotetia cercata ha equazioni: $\omega_{o, \frac{1}{e}}: \begin{cases} x' = \frac{1}{e}x \\ y' = \frac{1}{e}y \end{cases}$.

La sua inversa: $\omega_{o, \frac{1}{e}}^{-1}: \begin{cases} x = ex' \\ y = ey' \end{cases}$. Sostituiamo queste ultime espressioni nell'equazione di f_n per ottenere quella della sua trasformata.

$$y = x(n + \ln x) \xrightarrow{\omega_{o, \frac{1}{e}}^{-1}} ey = ex(n + \ln ex) \rightarrow y = x(n + \ln e + \ln x) \rightarrow y = x(n+1 + \ln x)$$

Quest'ultima espressione coincide appunto con quella di f_{n+1} .

- e. Consideriamo e studiamo la funzione $y = f_1(x) = \begin{cases} x(1 + \ln x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

- dominio: $dom(f_1(x)) = [0; +\infty)$
- simmetrie: non ci sono, poiché il dominio non è simmetrico rispetto a 0
- intersezioni con gli assi cartesiani: $O(0; 0)$ e $P_1\left(\frac{1}{e}; 0\right)$
- segno

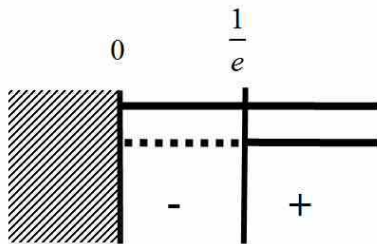
$$f_1(x) > 0 \rightarrow \begin{cases} x(1 + \ln x) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Per la prima disequazione studiamo separatamente i due fattori.

$$1^\circ \text{ fattore } > 0 \rightarrow x > 0$$

$$2^\circ \text{ fattore} > 0 \rightarrow x > \frac{1}{e}$$

Considerando che la funzione esiste solo nel dominio indicato, riassumiamo nel seguente schema lo studio del segno:



- comportamento agli estremi del dominio

Abbiamo già dimostrato la continuità da destra in 0; rimane da vedere come si comporta per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \ln x) = +\infty$$

Ricerchiamo un eventuale asintoto obliquo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x) = +\infty$$

Il grafico non presenta dunque asintoti obliqui.

- derivata prima, massimi e minimi

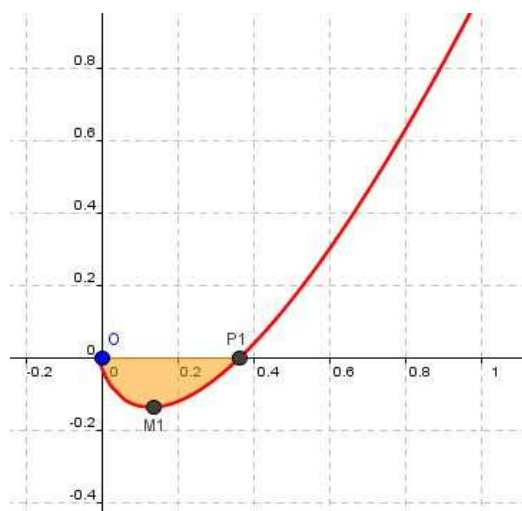
Abbiamo già visto che la funzione presenta un minimo nel punto $M_2 \left(\frac{1}{e^2}; -\frac{1}{e^2} \right)$; per il resto sappiamo che è decrescente a sinistra e crescente a destra di tale punto.

- derivata seconda, concavità, flessi

$$f_1''(x) = \frac{1}{x}$$

Essa non si annulla mai ed è positiva $\forall x > 0$, per cui il grafico rivolge la concavità sempre verso l'alto.

- grafico



f. L'area cercata è evidenziata in arancione in figura per la funzione studiata.

$$A_n = -\int_0^{\frac{1}{e^n}} x(n + \ln x) dx = -\left[\frac{x^2}{2}(n + \ln x) \right]_0^{\frac{1}{e^n}} + \int_0^{\frac{1}{e^n}} dx = -\left(0 - \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k^2}{2}(n + \ln k) \right) + \frac{1}{e^n} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k^2}{2}(n + \ln k) + \frac{1}{e^n}$$

Calcoliamo separatamente il limite, applicando il teorema di De l'Hopital:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k^2}{2}(n + \ln k) = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{n + \ln k}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{k}}{-\frac{2}{k^3}} = -\frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow 0^+} k^2 = 0$$

Abbiamo dunque:

$$A_n = \frac{1}{e^n}.$$

Tali valori dell'area costituiscono dunque la stessa progressione geometrica di cui abbiamo già parlato.