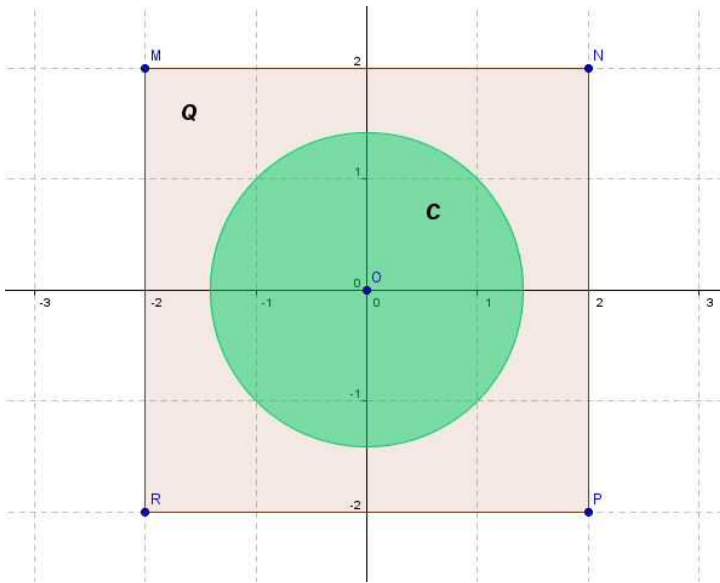


SOLUZIONE PROBLEMA 2 TRADIZIONALE



a. Con riferimento alla figura, possiamo immediatamente osservare che l'area del quadrato è pari a 16, mentre quella del cerchio vale πr^2 . La limitazione richiesta dal problema, affinché il cerchio sia interamente interno al quadrato, consiste nell'imporre che il raggio sia minore o uguale a metà del lato, cioè: $0 \leq r \leq 2$. La funzione cercata sarà pertanto:

$$f(r) = \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2}.$$

b. Studiamo la funzione trovata.

- dominio

E' necessario imporre che il denominatore sia diverso da zero:

$$16 - \pi r^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad r \neq \pm \frac{4}{\sqrt{\pi}}, \text{ per cui si ha: } \text{dom}(f(r)) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{\sqrt{\pi}}; \frac{4}{\sqrt{\pi}} \right\}.$$

- simmetrie

$$f(-r) = \frac{\pi(-r)^2}{16 - \pi(-r)^2} = \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} = f(r), \text{ per cui la funzione è pari e il suo grafico risulta}$$

simmetrico rispetto all'asse y.

- intersezioni con gli assi cartesiani

$$\text{asse } y: \begin{cases} y = \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} \\ r = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad O(0;0)$$

asse r : è immediato che si ritrova lo stesso punto

- segno

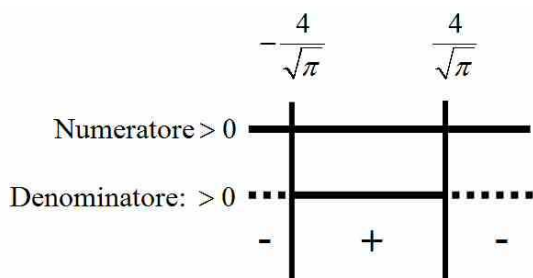
$$f(r) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} > 0$$

studiamo separatamente numeratore e denominatore:

$$N > 0 \quad \rightarrow \quad \forall r \neq 0$$

$$D > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{4}{\sqrt{\pi}} < r < \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

Riassumiamo lo studio nel seguente schema:



- comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(r) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi \cancel{r^2}}{\cancel{r^2} \left(\frac{16}{r^2} - \pi \right)} = -1$$

Il grafico presenta quindi un asintoto orizzontale completo di equazione $y = -1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi}}^+} f(r) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi}}^+} \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} = \frac{16}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi}}^-} f(r) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi}}^-} \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} = \frac{16}{0^-} = -\infty$$

Il grafico presenta pertanto anche due asintoti verticali completi, di equazioni: $x = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ e

$$x = \frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

- derivata prima, punti stazionari

$$f'(r) = \pi \frac{2r(16 - \pi r^2) - r^2(-2\pi r)}{(16 - \pi r^2)^2} = \frac{32\pi r}{(16 - \pi r^2)^2}$$

E' immediato verificare che $dom(f'(r)) = dom(f(r)) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{\sqrt{\pi}}; \frac{4}{\sqrt{\pi}} \right\}$, per cui la

funzione risulta ovunque derivabile.

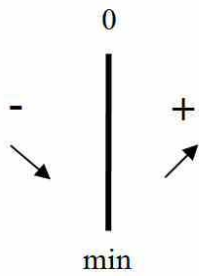
La derivata si annulla per $r = 0$, per cui l'origine risulta essere l'unico punto stazionario.

- crescita, decrescita, massimi e minimi

$$f'(r) > 0 \rightarrow \frac{32\pi r}{(16 - \pi r^2)^2} > 0 \rightarrow r > 0, \text{ com'è evidente per il fatto che il}$$

denominatore è sempre positivo nel dominio della funzione.

Riassumiamo lo studio della derivata prima nel seguente schema:

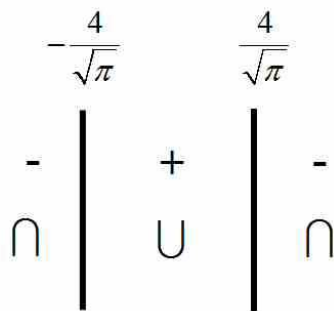


Risulta pertanto che nell'origine la funzione presenta un punto di minimo relativo.

- derivata seconda, concavità, flessi

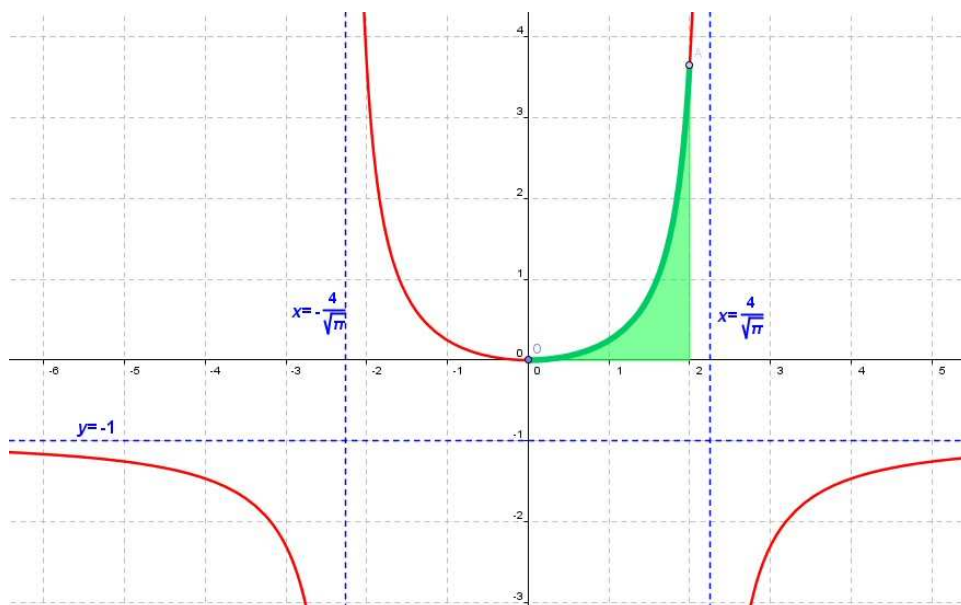
$$f''(r) = 32\pi \frac{(16 - \pi r^2)^2 - 2r(16 - \pi r^2)(-2\pi r)}{(16 - \pi r^2)^4} = 32\pi \frac{(16 - \pi r^2)(16 - \pi r^2 + 4\pi r^2)}{(16 - \pi r^2)^4} = \frac{32\pi(16 + 3\pi r^2)}{(16 - \pi r^2)^3}$$

Poiché il fattore a numeratore è sempre positivo, il segno della derivata è determinato dal suo denominatore, che abbiamo già discusso in precedenza. Riassumiamo pertanto lo studio del segno della derivata seconda nel seguente schema:



Il grafico non presenta pertanto punti di flesso, ma cambia solamente concavità in corrispondenza degli asintoti verticali.

- grafico



La parte relativa al problema geometrico iniziale è quella evidenziata in verde scuro.

c. L'area richiesta è quella evidenziata nella figura in verde chiaro. Si avrà pertanto:

$$A = \int_0^2 f(r) dr = \int_0^2 \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} dr$$

L'integrale va risolto effettuando prima la divisione tra numeratore e denominatore e in seguito scomponendo in fratti semplici.

$$\begin{array}{r|l} \pi r^2 & -\pi r^2 + 16 \\ -\pi r^2 & +16 \\ \hline & +16 \end{array} \quad -1$$

Si ha dunque:

$$A = \int_0^2 \frac{\pi r^2}{16 - \pi r^2} dr = -\int_0^2 dr + \int_0^2 \frac{16}{16 - \pi r^2} dr$$

Il secondo integrale va appunto risolto scomponendo la frazione in fratti semplici, come segue.

$$\frac{16}{16 - \pi r^2} = \frac{A}{4 - \sqrt{\pi}r} + \frac{B}{4 + \sqrt{\pi}r} = \frac{4A + A\sqrt{\pi}r + 4B - B\sqrt{\pi}r}{16 - \pi r^2} = \frac{(A - B)\sqrt{\pi}r + 4(A + B)}{16 - \pi r^2}$$

da cui si ricava, per confronto tra la frazione di partenza e quella finale:

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

L'area sarà pertanto:

$$\begin{aligned} A &= -\int_0^2 dr + 2\int_0^2 \frac{dr}{4 - \sqrt{\pi}r} + 2\int_0^2 \frac{dr}{4 + \sqrt{\pi}r} = [-r]_0^2 - 2\sqrt{\pi} \left[\ln|4 - \sqrt{\pi}r| \right]_0^2 + 2\sqrt{\pi} \left[\ln|4 + \sqrt{\pi}r| \right]_0^2 = \\ &= -2 - 2\sqrt{\pi} \ln(4 - 2\sqrt{\pi}) + \cancel{2\sqrt{\pi} \ln 4} + 2\sqrt{\pi} \ln(4 + 2\sqrt{\pi}) - \cancel{2\sqrt{\pi} \ln 4} = \\ &= 2\sqrt{\pi} \ln \frac{4 + 2\sqrt{\pi}}{4 - 2\sqrt{\pi}} - 2 \approx 7.95 \end{aligned}$$

d. Per la risoluzione facciamo riferimento alla figura.

Poiché le facce laterali della piramide sono triangoli equilateri, ogni spigolo della piramide ha misura pari a 4.

