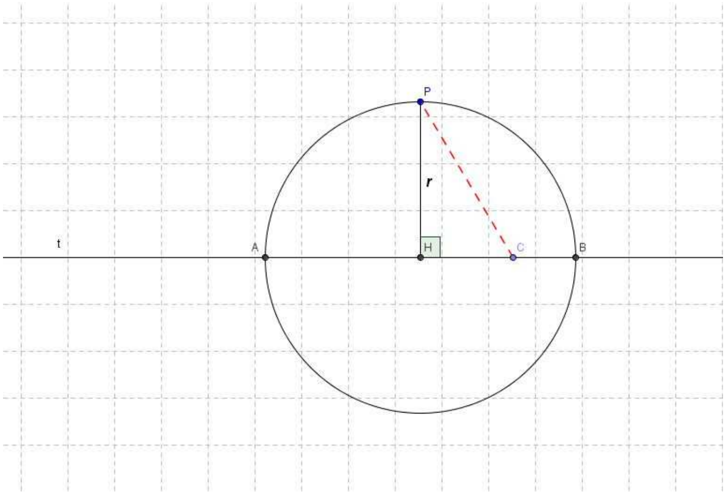
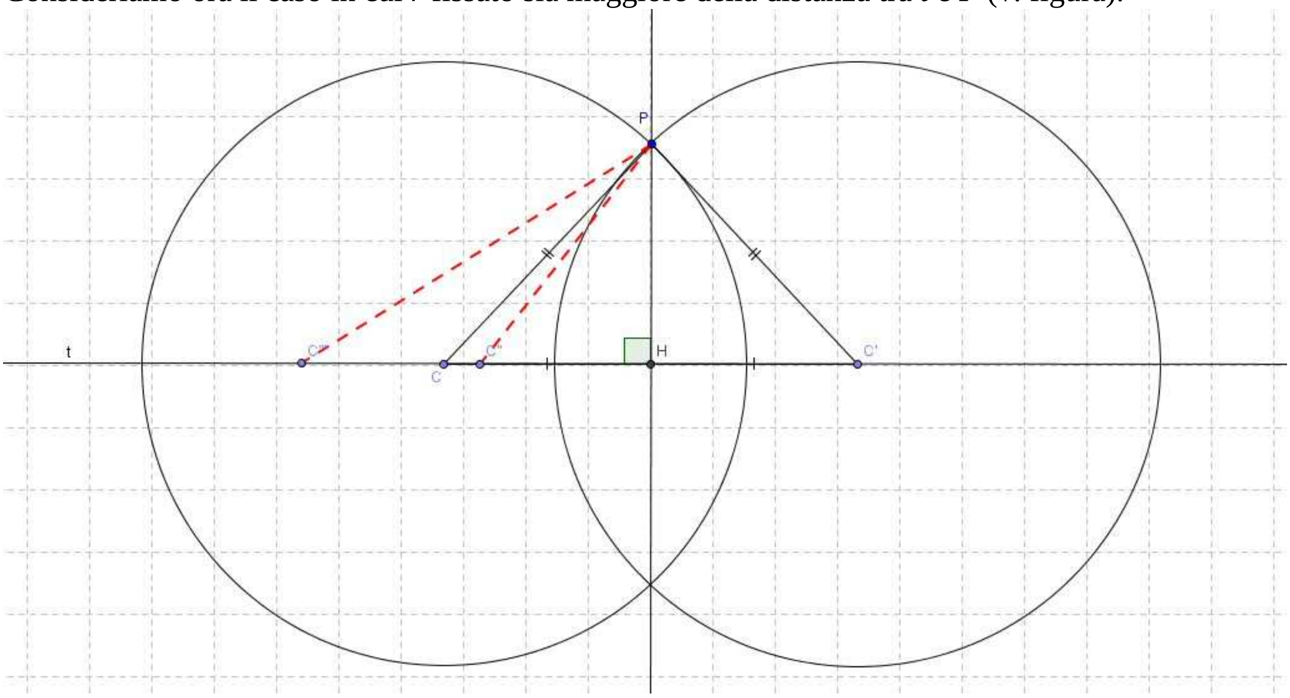
SOLUZIONE QUESITI P.N.I.

1. Il primo caso da analizzare è quello in cui la distanza fissata r coincide con la distanza tra t e P (v. figura). In questa situazione esiste una sola circonferenza che soddisfa i requisiti richiesti ed è quella centrata nel punto H, piede della perpendicolare a t per P, e passante per P. E' evidente che, volendo centrare una qualsiasi altra circonferenza in un punto C distinto da H, la distanza $\overline{CP}$ risulterà maggiore di r, in quanto ipotenusa del triangolo rettangolo PHC, per cui non è possibile trovare altre circonferenze.

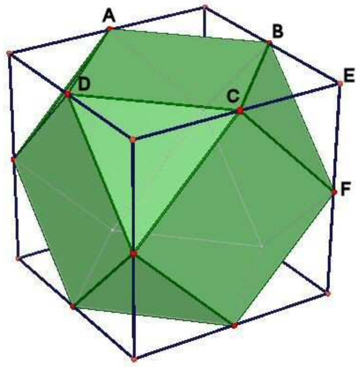


Consideriamo ora il caso in cui r fissato sia maggiore della distanza tra t e P (v. figura).



Si considera un punto $C \in t \,|\, \overline{CP} = r$, per cui esisterà ovviamente almeno la circonferenza centrata in C e passante per P.
Tracciamo ora la perpendicolare a t passante per P, che incontra t in H, e consideriamo su t, dalla parte opposta di H rispetto a C, il punto $C' \,|\, CH \cong HC'$ e congiungiamo C' con P.
Risulta che $CHP \cong C'HP$, in quanto sono entrambi rettangoli in H, hanno il cateto PH in comune e gli altri due cateti $CH \cong HC'$. Da tale congruenza segue che $PC \cong PC'$.
Dunque anche la circonferenza centrata in C' e passante per P soddisfa le richieste.
Qualunque altro punto scelto sulla retta t come centro di ulteriori circonferenze avrà distanza da P maggiore o minore di r, per cui va scartato.

2. Il poliedro (v. figura) è formato da sei facce quadrate, come $ABCD$, e otto facce triangolari equilatere, come BCF, i cui spigoli sono tutti congruenti. Se lo spigolo del cubo misura l, gli



spigoli del cubottaedro misurano $\frac{l}{2}\sqrt{2}$, per cui l'area di una delle facce quadrate sarà pari a $A_Q = \frac{l^2}{2}$, mentre quella di una faccia triangolare $A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{8}$.

L'area della superficie totale del poliedro misura pertanto:

$$A_{cubottaedro} = 6A_Q + 8A_T = 6\cdot\frac{l^2}{2} + 8\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{8} = l^2\left(3+\sqrt{3}\right).$$

Il volume del cubottaedro si può ottenere per differenza tra quello del cubo e otto volte quello di uno dei tetraedri del tipo *BCEF*.

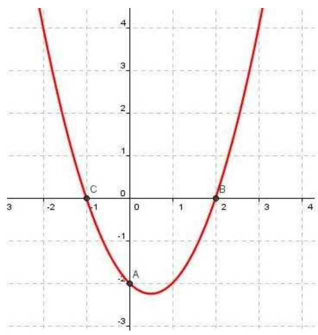
$$V_{cubo} = l^3$$

$$V_{BCEF} = \frac{1}{3}area(BCE)\cdot\overline{EF} = \frac{1}{3}\overline{BE}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{EF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{l^3}{48}$$

$$V_{cubottaedro} = l^3 - \frac{l^3}{6} = \frac{5}{6}l^3.$$

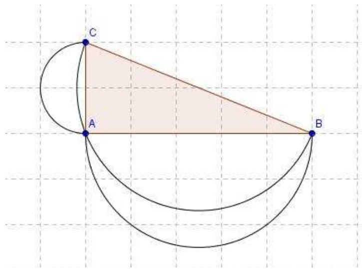
3. Se $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a;b]$, essa è pure integrabile in tale intervallo.
   a. Ponendo $x-c=t$, abbiamo che $dx=dt$, per cui l'integrale a secondo membro diventa:
   $$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_a^b f(t)dt$$
   L'uguaglianza risulta quindi dimostrata.
   b. Ponendo $\frac{x}{k}=t$, ossia $x=kt$, abbiamo $dx=kdt$, per cui il secondo membro diventa:
   $$\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx = \frac{1}{k}\int_a^b f(t)kdt = \int_a^b f(t)dt$$
   L'uguaglianza risulta quindi dimostrata.

4. Poniamo a sistema le equazioni delle due rette, per trovarne il punto di intersezione.
$$\begin{cases}\lambda x - y - (\lambda+2) = 0\\ (1-\lambda)x + y + 2 = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x-\lambda = 0\\ y = \lambda x - (\lambda+2)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda^2-\lambda-2\end{cases}$$
Eliminando il parametro si ottiene l'equazione cartesiana del luogo geometrico:
$$y = x^2 - x - 2.$$
Si tratta di una parabola di vertice $V\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$, che interseca l'asse y nel punto $A(0;-2)$ e l'asse x nei punti $B(2;0)$ e $C(-1;0)$. Rappresentiamo graficamente.



5. Con riferimento alla figura, se poniamo $\overline{BC} = 2r$ e $A\hat{B}C = x$, troviamo: $\overline{AB} = 2r\cos x$ e $\overline{AC} = 2r\sin x$.

L’area del triangolo ABC sarà pertanto pari a $area(ABC) = \frac{1}{2} 2r\cos x \cdot 2r\sin x = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x$.



L’area del semicerchio di partenza vale $area(semicerchioBC) = \frac{\pi}{2} r^2$.

Da queste due, per differenza, si può trovare la somma S_1 delle aree dei due segmenti circolari compresi tra il semicerchio di partenza e i cateti del triangolo.

$S_1 = \frac{\pi}{2} r^2 - r^2 \sin 2x$.

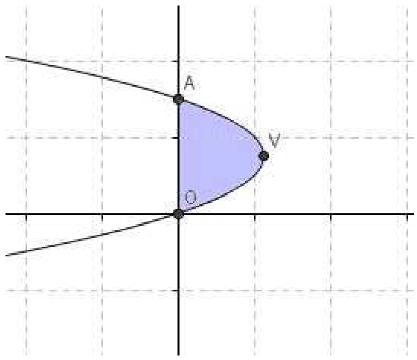
L’area del semicerchio costruito sul cateto $\overline{AC}$ è $area(semicerchioAC) = \frac{\pi}{2} r^2 \sin^2 x$, quella del semicerchio costruito sul cateto $\overline{AB}$ è $area(semicerchioAB) = \frac{\pi}{2} r^2 \cos^2 x$.

Se dalla somma di queste due aree togliamo S_1, troviamo la somma S_2 delle aree delle due lunule.

$$S_2 = \frac{\pi}{2} r^2 \sin^2 x + \frac{\pi}{2} r^2 \cos^2 x - \frac{\pi}{2} r^2 + r^2 \sin 2x = \frac{\pi}{2} r^2 \left(\sin^2 x + \cos^2 x - 1\right) + r^2 \sin 2x = r^2 \sin 2x$$

Il risultato verifica l’uguaglianza tra S_2 e l’area del triangolo di partenza.

6. L’area in questione è quella evidenziata nella figura.



Il vertice della parabola è il punto $V\left(\frac{3}{2a}; \frac{9}{4a}\right)$, mentre i punti di intersezione tra la parabola e l’asse y sono l’origine e $A\left(0; \frac{3}{a}\right)$.

L’area è dunque data da:

$$A = \int_0^{\frac{3}{a}} \left(-ay^2 + 3y\right) dy = \left[-\frac{1}{3} a y^3 + \frac{3}{2} y^2\right]_0^{\frac{3}{a}} = -\frac{1}{\cancel{3}} \cancel{a} \cdot \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{a^{\cancel{3}\,2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{a^2} = \frac{9}{2a^2}$$

Ponendo $A = 72$, si trova $a = \pm \frac{1}{4}$, da cui $a = \frac{1}{4}$, se si considera la condizione data dal problema, $a > 0$.

7. Appurato che la funzione è continua sia per $x < 0$, sia per $x > 0$, poiché risulta da somme o prodotti di funzioni continue, rimane da verificarne la continuità per $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(e^{-x} + 1\right) = 2 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2 + x \ln x\right) = 2 + \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 2 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 - \lim_{x \to 0^+} x = 2$$

L’uguaglianza dei valori trovati garantisce la continuità per $x = 0$.

Studiamo la derivabilità.

$D\left(e^{-x}+1\right)=-e^{-x}$, se $x<0$

$D\left(2+x\ln x\right)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$, se $x>0$

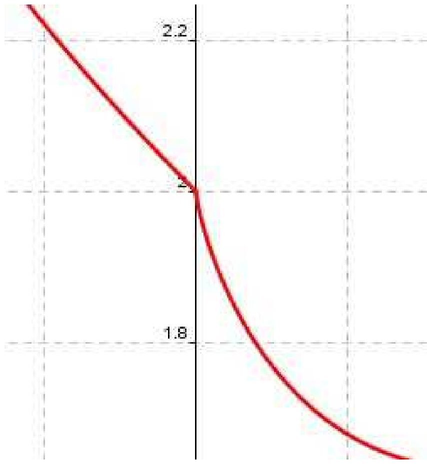
Le espressioni trovate garantiscono la derivabilità nei due intervalli di riferimento. Rimane da studiare la derivabilità per $x=0$.

Poiché la funzione è continua in tale punto e derivabile in un suo intorno, calcoliamo i limiti sinistro e destro delle derivate in tal punto.

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-e^{-x}\right)=-1$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x+1\right)=-\infty$

La funzione risulta quindi non derivabile per $x=0$, che è un punto angoloso, dove la tangente sinistra ha coefficiente angolare pari a -1 e quella destra è invece verticale.



8. Il coefficiente binomiale è il numero di combinazioni di n elementi presi k alla volta ed è definito come $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Sfruttando la definizione, verifichiamo la proprietà.

$$k\binom{n}{k}+(k-1)\binom{n}{k-1}-n\binom{n}{k-1}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}+(k-1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}-n\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=$$

$$\frac{kn!(n-k+1)+k(k-1)n!-nkn!}{k!(n-k+1)!}=\frac{n!\left(nk-k^2+k+k^2-k-nk\right)}{k!(n-k+1)!}=0$$

9. Con riferimento alla figura, compiliamo la seguente tabella, in cui si riportano nella prima colonna tutti i cammini possibili, nella seconda i tempi impiegati a percorrerli, nella terza le probabilità di percorrerli, calcolate tenendo conto che, ad ogni bivio la probabilità di prendere una qualunque delle due strade possibili vale $\frac{1}{2}$ e, ad ogni trivio, la probabilità di prendere una qualunque delle tre strade possibili vale $\frac{1}{3}$.

Cammino	**Tempo (secondi)**	**Probabilità**
ABCERGTU	$\boxed{7}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
ABCERGS	6	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
ABCEMJ	5	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
ABCEMHV	6	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
ABCEMHKNQ	8	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
ABDFPHMJ	$\boxed{7}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

ABDFPHV	6	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$
ABDFPHKNQ	8	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$
ABDFKHMJ	$\boxed{7}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$
ABDFKHV	6	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$
ABDFKNQ	6	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
ABDFLNKHMJ	9	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$
ABDFLNKHV	8	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$
ABDFLNQ	6	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

Nella tabella sono stati evidenziati i casi in cui il cammino richiede 7 secondi e quelli in cui il topo passa per il punto *H*.

a. La probabilità di impiegare 7 secondi è data dalla somma delle probabilità dei tre cammini corrispondenti a tali tempi, in quanto si tratta di eventi mutuamente esclusivi:

$$P(7)=\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}=\frac{2}{9}$$

b. La probabilità che, avendo impiegato 7 secondi il topo sia passato per *H* è una probabilità condizionata:

$$P\left(H/_{7}\right)=\frac{P\left(H\cap 7\right)}{P\left(7\right)}=\frac{\frac{1}{18}+\frac{1}{24}}{\frac{2}{9}}=\frac{7}{72}\cdot\frac{9}{2}=\frac{7}{16}$$

10. Per rappresentare un'affinità le equazioni di *T* devono essere di 1° grado in *x* e *y*, condizione che è ovviamente verificata, ma il determinante della matrice dei coefficienti deve essere diverso da zero, altrimenti non si tratta di corrispondenza biunivoca, in quanto il sistema non è invertibile.

a. $\det\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}\neq 0 \quad\to\quad (a+b)^2-(a-b)^2\neq 0 \quad\to\quad 4ab\neq 0 \quad\to\quad a\neq 0\wedge b\neq 0$

b. Per avere isometrie deve innanzitutto verificarsi che

$$\det\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}=\pm 1 \quad\to\quad ab=\pm\frac{1}{4}.$$

Inoltre le matrici delle isometrie possono essere di due tipi:

- isometrie dirette, in cui gli elementi della diagonale principale sono uguali e quelli della diagonale secondaria opposti;
- isometrie invertenti, in cui gli elementi della diagonale principale sono opposti e quelli della diagonale secondaria uguali.

Le possibilità sono dunque riassunte nei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} ab = \pm\frac{1}{4} \\ a-b = -(a-b) \end{cases} \vee \begin{cases} ab = \pm\frac{1}{4} \\ a+b = -(a+b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ab = \pm\frac{1}{4} \\ a-b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} ab = \pm\frac{1}{4} \\ a+b = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} ab = \frac{1}{4} \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} ab = -\frac{1}{4} \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} ab = \frac{1}{4} \\ a = -b \end{cases} \vee \begin{cases} ab = -\frac{1}{4} \\ a = -b \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{1}{4} \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = -\frac{1}{4} \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = \frac{1}{4} \\ a = -b \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = -\frac{1}{4} \\ a = -b \end{cases}$$

Il secondo e il quarto sistema sono evidentemente impossibili, per cui rimane:

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ottengono quindi 4 isometrie, di cui riportiamo le matrici e le descrizioni qui di seguito:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ identità
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ simmetria rispetto all'origine
- $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante