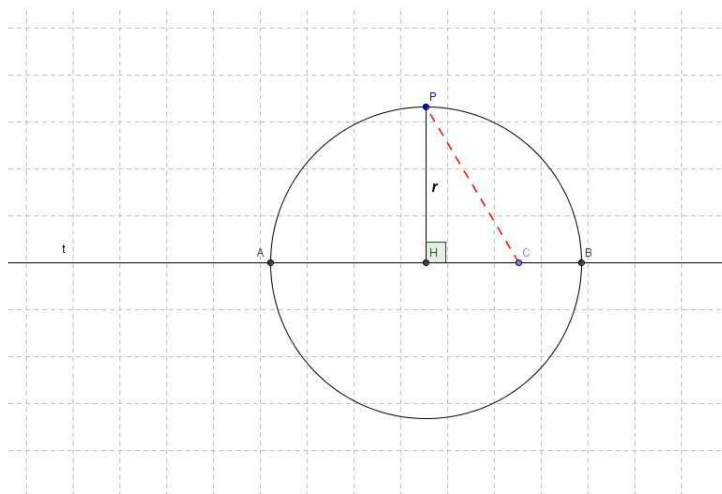
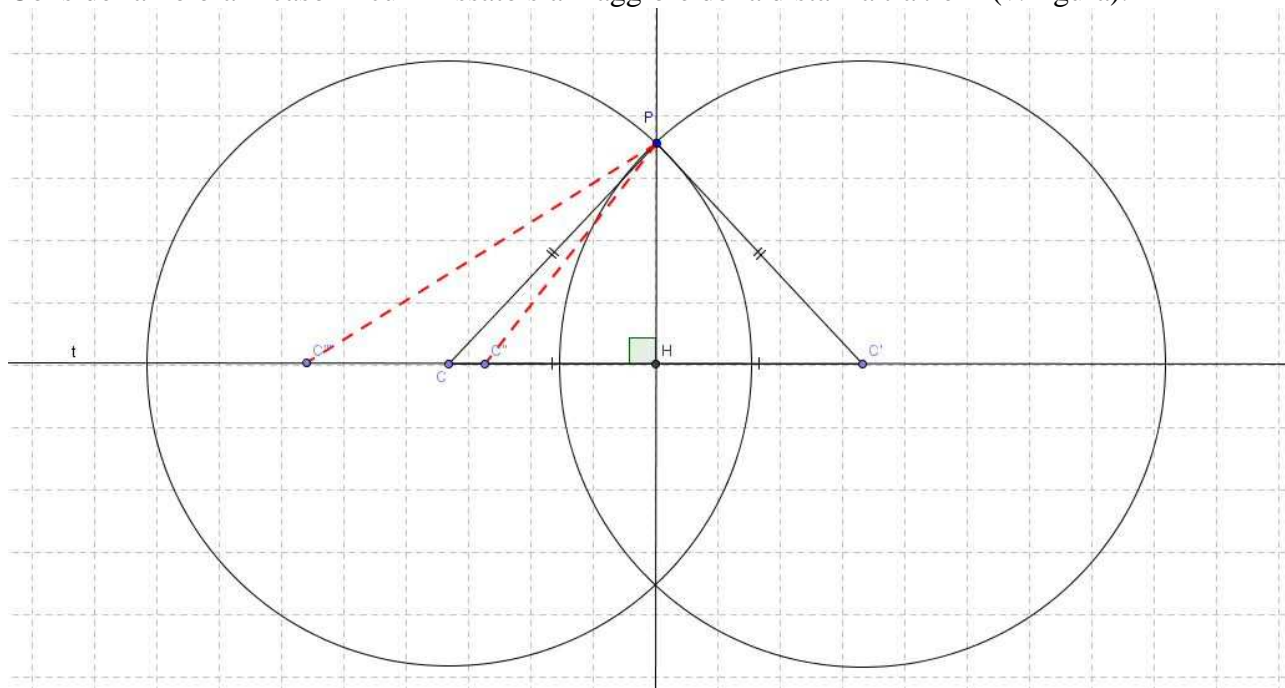


## SOLUZIONE QUESITI TRADIZIONALE

1. Il primo caso da analizzare è quello in cui la distanza fissata  $r$  coincide con la distanza tra  $t$  e  $P$  (v. figura). In questa situazione esiste una sola circonferenza che soddisfa i requisiti richiesti ed è quella centrata nel punto  $H$ , piede della perpendicolare a  $t$  per  $P$ , e passante per  $P$ . E' evidente che, volendo centrare una qualsiasi altra circonferenza in un punto  $C$  distinto da  $H$ , la distanza  $\overline{CP}$  risulterà maggiore di  $r$ , in quanto ipotenusa del triangolo rettangolo  $PHC$ , per cui non è possibile trovare altre circonferenze.



Consideriamo ora il caso in cui  $r$  fissato sia maggiore della distanza tra  $t$  e  $P$  (v. figura).



Si considera un punto  $C \in t \mid \overline{CP} = r$ , per cui esisterà ovviamente almeno la circonferenza centrata in  $C$  e passante per  $P$ .

Tracciamo ora la perpendicolare a  $t$  passante per  $P$ , che incontra  $t$  in  $H$ , e consideriamo su  $t$ , dalla parte opposta di  $H$  rispetto a  $C$ , il punto  $C' \mid CH \cong HC'$  e congiungiamo  $C'$  con  $P$ .

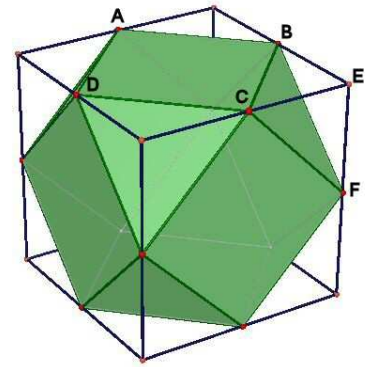
Risulta che  $CHP \cong C'HP$ , in quanto sono entrambi rettangoli in  $H$ , hanno il cateto  $PH$  in comune e gli altri due cateti  $CH \cong HC'$ . Da tale congruenza segue che  $PC \cong PC'$ .

Dunque anche la circonferenza centrata in  $C'$  e passante per  $P$  soddisfa le richieste.

Qualunque altro punto scelto sulla retta  $t$  come centro di ulteriori circonferenze avrà distanza da  $P$  maggiore o minore di  $r$ , per cui va scartato.

2. Il poliedro (v. figura) è formato da sei facce quadrate, come  $ABCD$ , e otto facce triangolari equilateri, come  $BCF$ , i cui spigoli sono tutti congruenti. Se lo spigolo del cubo misura  $l$ , gli

spigoli del cubottaedro misurano  $\frac{l}{2}\sqrt{2}$ , per cui l'area di una delle facce quadrate sar a pari a  $A_Q = \frac{l^2}{2}$ , mentre quella di una faccia triangolare  $A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{8}$ .



L'area della superficie totale del poliedro misura pertanto:

$$A_{\text{cubottaedro}} = 6A_Q + 8A_T = 6 \cdot \frac{l^2}{2} + 8 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{8} = l^2(3 + \sqrt{3}).$$

Il volume del cubottaedro si pu  ottenere per differenza tra quello del cubo e otto volte quello di uno dei tetraedri del tipo  $BCEF$ .

$$V_{\text{cubo}} = l^3$$

$$V_{BCEF} = \frac{1}{3} \text{area}(BCE) \cdot \overline{EF} = \frac{1}{3} \overline{BE} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^3}{48}$$

$$V_{\text{cubottaedro}} = l^3 - \frac{l^3}{6} = \frac{5}{6}l^3.$$

3. Se  $f(x)$    continua nell'intervallo  $[a; b]$ , essa   pure integrabile in tale intervallo.
- a. Ponendo  $x - c = t$ , abbiamo che  $dx = dt$ , per cui l'integrale a secondo membro diventa:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_a^b f(t)dt$$

L'uguaglianza risulta quindi dimostrata.

- b. Ponendo  $\frac{x}{k} = t$ , ossia  $x = kt$ , abbiamo  $dx = kdt$ , per cui il secondo membro diventa:

$$\frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx = \frac{1}{k} \int_a^b f(t)kdt = \int_a^b f(t)dt$$

L'uguaglianza risulta quindi dimostrata.

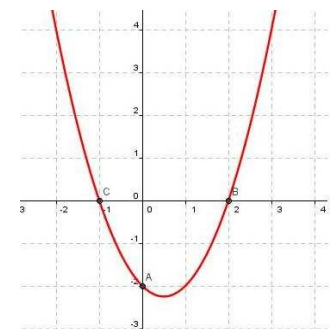
4. Poniamo a sistema le equazioni delle due rette, per trovarne il punto di intersezione.

$$\begin{cases} \lambda x - y - (\lambda + 2) = 0 \\ (1 - \lambda)x + y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \lambda = 0 \\ y = \lambda x - (\lambda + 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{cases}$$

Eliminando il parametro si ottiene l'equazione cartesiana del luogo geometrico:

$$y = x^2 - x - 2.$$

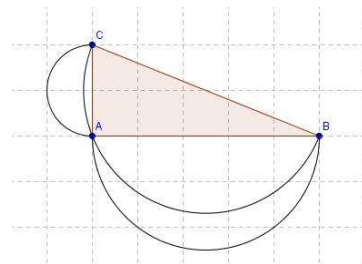
Si tratta di una parabola di vertice  $V\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ , che interseca l'asse  $y$  nel punto  $A(0; -2)$  e l'asse  $x$  nei punti  $B(2; 0)$  e  $C(-1; 0)$ . Rappresentiamo graficamente.



5. Con riferimento alla figura, se poniamo  $\overline{BC} = 2r$  e  $\hat{A}BC = x$ , troviamo:  $\overline{AB} = 2r \cos x$  e  $\overline{AC} = 2r \sin x$ .

L'area del triangolo  $ABC$  sarà pertanto pari a  $area(ABC) = \frac{1}{2} 2r \cos x \cdot 2r \sin x = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x$ .

L'area del semicerchio di partenza vale  $area(semicerchioBC) = \frac{\pi}{2} r^2$ .



Da queste due, per differenza, si può trovare la somma  $S_1$  delle aree dei due segmenti circolari compresi tra il semicerchio di partenza e i cateti del triangolo.

$$S_1 = \frac{\pi}{2} r^2 - r^2 \sin 2x.$$

L'area del semicerchio costruito sul cateto  $\overline{AC}$  è  $area(semicerchioAC) = \frac{\pi}{2} r^2 \sin^2 x$ , quella

del semicerchio costruito sul cateto  $\overline{AB}$  è  $area(semicerchioAB) = \frac{\pi}{2} r^2 \cos^2 x$ .

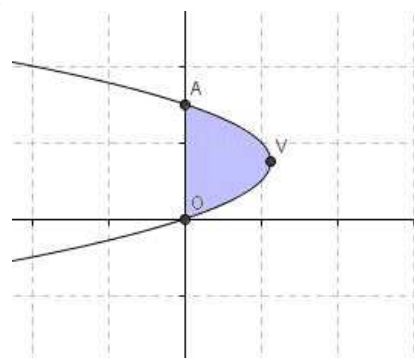
Se dalla somma di queste due aree togliamo  $S_1$ , troviamo la somma  $S_2$  delle aree delle due lunule.

$$S_2 = \frac{\pi}{2} r^2 \sin^2 x + \frac{\pi}{2} r^2 \cos^2 x - \frac{\pi}{2} r^2 + r^2 \sin 2x = \frac{\pi}{2} r^2 (\sin^2 x + \cos^2 x - 1) + r^2 \sin 2x = r^2 \sin 2x$$

Il risultato verifica l'uguaglianza tra  $S_2$  e l'area del triangolo di partenza.

6. L'area in questione è quella evidenziata nella figura.

Il vertice della parabola è il punto  $V\left(\frac{3}{2a}; \frac{9}{4a}\right)$ , mentre i punti di intersezione tra la parabola e l'asse  $y$  sono l'origine e  $A\left(0; \frac{3}{a}\right)$ .



L'area è dunque data da:

$$A = \int_0^{\frac{3}{a}} (-ay^2 + 3y) dy = \left[ -\frac{1}{3} ay^3 + \frac{3}{2} y^2 \right]_0^{\frac{3}{a}} = -\frac{1}{3} a \cdot \frac{27}{a^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{a^2} = \frac{9}{2a^2}$$

Ponendo  $A = 72$ , si trova  $a = \pm \frac{1}{4}$ , da cui  $a = \frac{1}{4}$ , se si considera la condizione data dal problema,  $a > 0$ .

7. Appurato che la funzione è continua sia per  $x < 0$ , sia per  $x > 0$ , poiché risulta da somme o prodotti di funzioni continue, rimane da verificarne la continuità per  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} + 1) = 2 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x) = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 2$$

L'uguaglianza dei valori trovati garantisce la continuità per  $x = 0$ .

Studiamo la derivabilità.

$$D(e^{-x} + 1) = -e^{-x}, \text{ se } x < 0$$

$$D(2 + x \ln x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \text{ se } x > 0$$

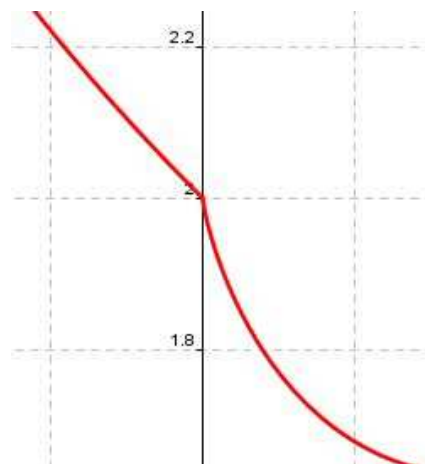
Le espressioni trovate garantiscono la derivabilità nei due intervalli di riferimento. Rimane da studiare la derivabilità per  $x = 0$ .

Poiché la funzione è continua in tale punto e derivabile in un suo intorno, calcoliamo i limiti sinistro e destro delle derivate in tal punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x}) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty$$

La funzione risulta quindi non derivabile per  $x = 0$ , che è un punto angoloso, dove la tangente sinistra ha coefficiente angolare pari a -1 e quella destra è invece verticale.



8. Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2} [\arcsin 2x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Dunque l'espressione di partenza è pari a  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e la risposta corretta è la d.

9. Il coefficiente binomiale è il numero di combinazioni di  $n$  elementi presi  $k$  alla volta ed è definito come  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Sfruttando la definizione, verifichiamo la proprietà.

$$k \binom{n}{k} + (k-1) \binom{n}{k-1} - n \binom{n}{k-1} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} + (k-1) \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - n \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$\frac{kn!(n-k+1) + k(k-1)n! - nkn!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(nk - k^2 + k + k^2 - k - nk)}{k!(n-k+1)!} = 0$$

10. Per il calcolo del dominio è necessario imporre l'esistenza della radice, quella dell'arcoseno e il denominatore diverso da zero.

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \\ -1 \leq -1 + \frac{x}{|1-x|} \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 0 \leq \frac{x}{x-1} \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 2x-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x \geq 2$$

Dunque  $dom(f(x)) = [2; +\infty)$ , per cui la funzione può anche essere riscritta come segue:

$$y = f(x) = \sqrt{x-1} \arcsin \left( -1 + \frac{x}{|1-x|} \right) = \sqrt{x-1} \arcsin \left( -1 + \frac{x}{x-1} \right) = \sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x-1} = +\infty \cdot 0 \text{ (forma indeterminata).}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x-1}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{-\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\cancel{x-1}}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}} \cdot \frac{1}{\cancel{(x-1)^2}} \cdot 2\cancel{(x-1)}\sqrt{x-1} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 2x - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} = 0
\end{aligned}$$

Nel calcolo si è tenuto conto del segno positivo del fattore  $x-1$  nel dominio della funzione.