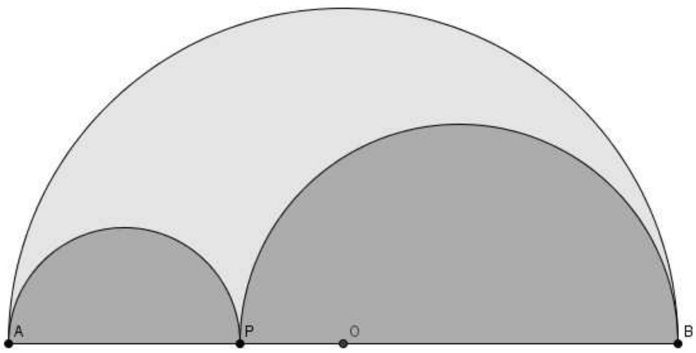
SIMULAZIONE ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO 2010
CORSO SPERIMENTALE P.N.I.
TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2$, si consideri su di essa un punto P e sia $\overline{AP}=x$. Si traccino in seguito due semicirconferenze aventi diametri $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$, giacenti nello stesso semipiano della semicirconferenza iniziale. La regione di piano compresa tra le tre semicirconferenze è detta *arbelo* (dal greco *ἄρβηλος*: coltello da calzolaio).

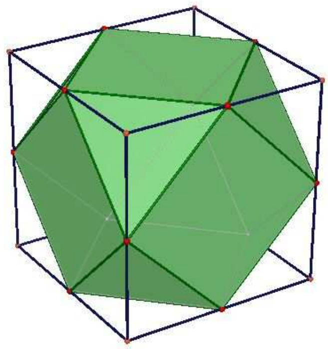


a. Esprimere in funzione di *x* il rapporto tra l'area dell'arbelo e la somma delle aree dei due semicerchi minori, individuando in particolare i valori di *x* per cui il problema ha significato.
b. Studiare la funzione $y=f\left(x\right)$ individuata al punto precedente, in modo completo fino a tracciarne il grafico, prescindendo dalle limitazioni geometriche di cui sopra.
c. Interpretare geometricamente il massimo della funzione e verificarne la simmetria del grafico rispetto alla verticale passante per tale massimo.
d. Determinare una trasformazione da effettuare sul grafico affinché la funzione risulti pari e abbia come asintoto orizzontale l'asse *x*.
e. Calcolare l'area della regione illimitata di piano compresa tra il grafico e il suo asintoto orizzontale, verificando che essa è finita.

PROBLEMA 2

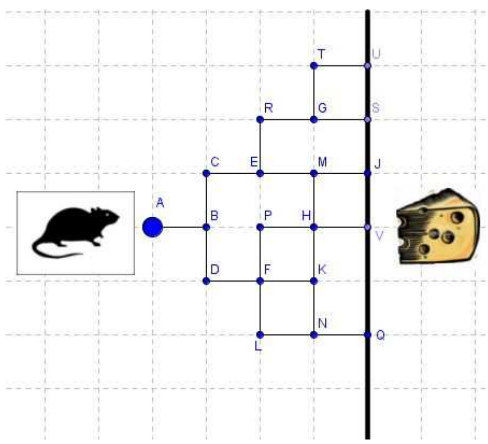
Sono date le funzioni $f_n(x)=\begin{cases} x(n+\ln x) & se \quad x>0 \\ 0 & se \quad x=0 \end{cases}$, dove *n* è un parametro naturale.

a. Studiare la continuità e la derivabilità delle funzioni.
b. Verificare che esse hanno tutte un punto di minimo e che le coordinate dei punti di minimo, al variare di *n*, costituiscono due progressioni geometriche aventi la stessa ragione.
c. Verificare che l'ascissa del punto di minimo di f_n coincide con l'ascissa del punto, distinto dall'origine, in cui il grafico di f_{n+1} interseca l'asse *x*.
d. Dimostrare che l'omotetia di centro *O* e rapporto $\dfrac{1}{e}$ trasforma il grafico di f_n in quello di f_{n+1}.
e. Completare lo studio e tracciare il grafico della funzione $y=f_1(x)$.
f. Calcolare l'area variabile A_n della regione di piano finita delimitata dal grafico delle f_n e dall'asse *x* e verificare che tale area, al variare di *n*, costituisce una progressione geometrica.



QUESITI

1. Sia t una retta e P un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio r, passanti per P e con centro su t sono al più due.
2. Dato un cubo di spigolo l, il poliedro che ha per vertici i punti medi dei suoi spigoli si chiama cubottaedro (v. figura). Determinare la superficie totale e il volume del cubottaedro in funzione di l.
3. Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a;b]$, dimostrare che:
   a. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$
   b. $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$
4. Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni $\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0$ e $(1-\lambda)x + y + 2 = 0$, descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni poi la curva γ.
5. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.
6. Data la parabola di equazione $x = -ay^2 + 3y$, con $a > 0$, si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.
7. Data la funzione $y = f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & se \quad x \le 0 \\ 2 + x\ln x & se \quad x > 0 \end{cases}$, dimostrare che essa è ovunque continua e studiarne la derivabilità. Classificarne in seguito gli eventuali punti di non derivabilità.
8. Dopo aver definito il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, verificare che vale la seguente relazione:
   $k\binom{n}{k} + (k-1)\binom{n}{k-1} - n\binom{n}{k-1} = 0$.



9. Il topolino della figura parte dal punto A e deve raggiungere il formaggio seguendo uno dei percorsi possibili tra quelli evidenziati. Esso ad ogni bivio può muoversi in verticale sia verso l'alto sia verso il basso, ma in orizzontale soltanto da sinistra verso destra (non può in ogni caso tornare indietro). Sapendo che per ogni tratto impiega 1 secondo, e che ogni cammino è equiprobabile, salvo quelli proibiti, calcolare:
   a. la probabilità che raggiunga il formaggio in 7 secondi;
   b. la probabilità che, se raggiunge il formaggio in 7 secondi, sia passato per il punto H.
10. Si consideri la trasformazione $T: \begin{cases} x' = (a+b)x + (a-b)y \\ y' = (a-b)x + (a+b)y \end{cases}$
    a. Come devono essere scelti i parametri a e b affinché essa sia un'affinità?
    b. Per quali valori dei parametri essa rappresenta isometrie? Quante e quali sono tali isometrie?

Durata massima della prova 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile