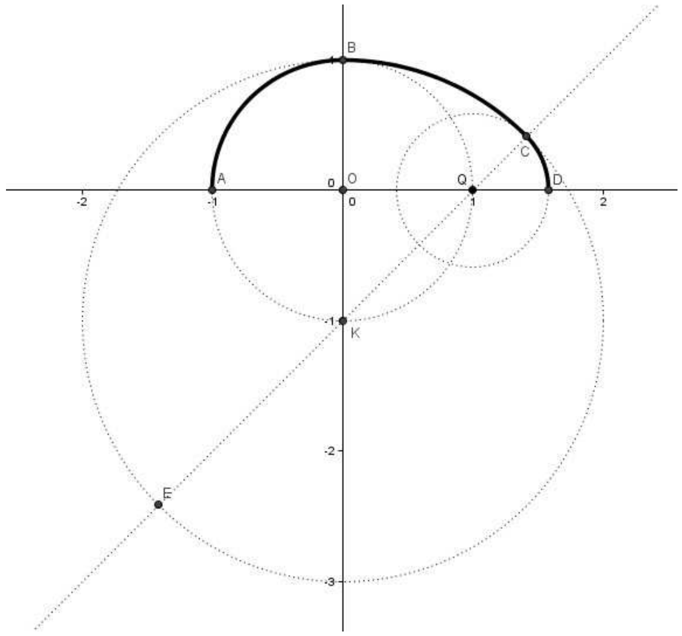
SIMULAZIONE ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO 2010
CORSO TRADIZIONALE
TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1



Con riferimento alla figura, la curva evidenziata in neretto è formata dai tre archi di circonferenza $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CD}$.

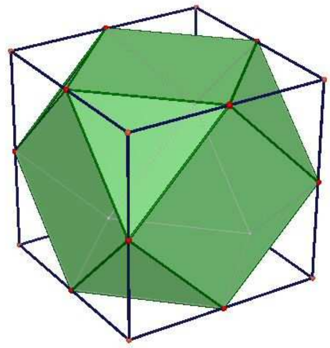
a. Spiegare perché tale curva rappresenta graficamente una funzione $y = f(x)$, scriverne l'espressione analitica e determinarne il campo di esistenza e l'insieme delle immagini.
b. Studiare la derivabilità di $f(x)$, con particolare riferimento ai punti *A*, *B*, *C* e *D*.
c. Unendo la curva data con la sua simmetrica rispetto all'asse *x* si ottiene una linea chiusa detta *ovale*. Si calcolino la lunghezza dell'ovale, l'area della regione piana da esso racchiusa e il volume del solido che si ottiene da una rotazione di 180° di tale regione piana attorno all'asse *x*.

PROBLEMA 2

Nel piano cartesiano *xOy* si consideri il quadrato ***Q*** rappresentato dal sistema $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$ e il cerchio ***C*** rappresentato dalla disequazione $x^2 + y^2 \le r^2$, dove *r* è un parametro reale da limitare in modo tale che il cerchio risulti interamente contenuto nel quadrato.

a. Determinare la funzione $y = f(r)$ che rappresenta il rapporto tra l'area del cerchio e quella della parte restante di quadrato.
b. Studiare la funzione precedente in modo completo, fino a tracciarne il grafico, prescindendo dalle limitazioni del problema geometrico, ma evidenziando la parte di grafico che si riferisce al problema stesso.
c. Calcolare l'area della regione piana compresa tra il grafico precedente e l'asse *r*, relativa all'intervallo in cui ha significato il problema geometrico.
d. Dopo aver costruito sul quadrato ***Q***, preso come base, una piramide retta a facce triangolari equilatere e sul cerchio ***C*** un cilindro che risulti inscritto nella piramide, determinare per quale valore del parametro *r* il volume del cilindro risulta massimo.

QUESITI



1. Sia t una retta e P un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio r, passanti per P e con centro su t sono al più due.
2. Dato un cubo di spigolo l, il poliedro che ha per vertici i punti medi dei suoi spigoli si chiama cubottaedro (v. figura). Determinare la superficie totale e il volume del cubottaedro in funzione di l.
3. Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a;b]$, dimostrare che:

   a. $\forall c \in \mathbb{R}\ ,\ \int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$

   b. $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\},\ \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$
4. Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni $\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0$ e $(1-\lambda)x + y + 2 = 0$, descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni poi la curva γ.
5. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.
6. Data la parabola di equazione $x = -ay^2 + 3y$, con $a > 0$, si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.
7. Data la funzione $y = f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & se \quad x \le 0 \\ 2 + x\ln x & se \quad x > 0 \end{cases}$, dimostrare che essa è ovunque continua e studiarne la derivabilità. Classificarne in seguito gli eventuali punti di non derivabilità.
8. Dire se il valore dell'espressione $y = \sin\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$ è:

   a. non calcolabile

   b. pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   c. pari a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

   d. pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Giustificare opportunamente la risposta scelta.
9. Dopo aver definito il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, verificare che vale la seguente relazione:

   $k\binom{n}{k} + (k-1)\binom{n}{k-1} - n\binom{n}{k-1} = 0$.
10. Data la funzione $y = f(x) = \sqrt{x-1}\arcsin\left(-1 + \frac{x}{|1-x|}\right)$, dopo averne determinato l'insieme di definizione, si dimostri, utilizzando la regola di De l'Hopîtal, che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Durata massima della prova 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile