ORIENTAMENTO PER STUDENTI DELLE SCUOLE SUPERIORI (2008/09)

Vittorio Mussino
Dipartimento di Fisica
Politecnico di Torino

moto di un corpo su una superficie in presenza di forze dissipative

Prerequisiti curriculari

MATEMATICA E GEOMETRIA

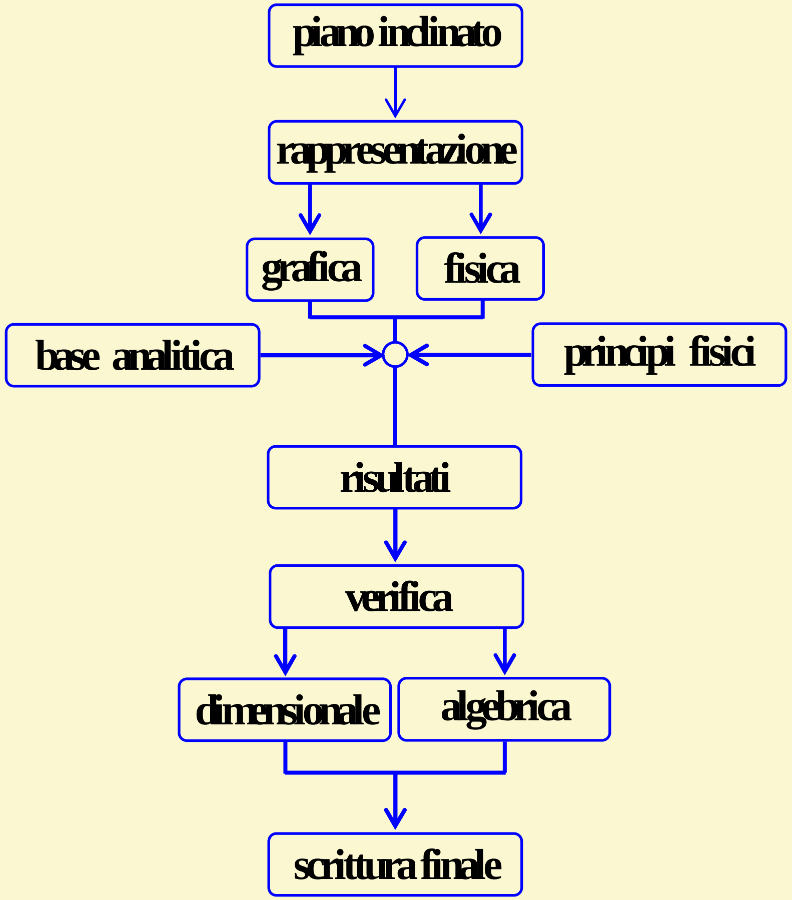
- **relazione fra lati e angoli in un triangolo rettangolo**
- **definizione di grandezza scalare e vettoriale (modulo, direzione e verso)**
- **scomposizione di un [*vettore*] nelle sue componenti, proiezione di un vettore lungo una direzione**
- **somma e differenza (risultante) di vettori**
- **prodotto scalare di due vettori**

FISICA

- **[*unità di misura*]**
- **definizione di riferimento, spazio percorso, velocità e accelerazione**
- **moto rettilineo uniforme e vario**
- **definizione di forza**
- **leggi della dinamica**
- **forza peso e forza di attrito**
- **lavoro compiuto da una forza**
- **energia cinetica e potenziale**
- **relazione fra lavoro e variazione di energia cinetica**
- **conservazione dell’energia**

Progettazione di un processo di conoscenza

- La descrizione di un fenomeno fisico, soprattutto a livello applicativo di esercizio, risulta facilitata dalla possibilità di scomporlo in una serie di elementi che possono essere descritti in modo semplice e coerente secondo principi elementari con formalismo matematico appropriato.
- I vari elementi devono essere correlati secondo una logica sequenziale: cioè ogni singolo atto di conoscenza è l'estensione di quello (o quelli) precedente. Ciò implica una sempre minore idealizzazione del fenomeno in studio e operativamente un numero sempre maggiore di "perché" troveranno una razionale spiegazione.
- Nel caso del moto di una massa su un piano inclinato scabro, per una soluzione ottimale del problema è utile seguire lo schema di analisi proposto qui a lato.



Moto di un corpo su un piano inclinato scabro

- La [***massa puntiforme***] m scivola su un piano scabro, inclinato di un angolo θ rispetto al livello orizzontale. Sapendo che la massa inizia a scivolare partendo dal punto A, posto ad altezza h rispetto all'orizzontale, con velocità iniziale v_0 (parallela al piano), calcolare:
  - l'accelerazione con la quale la massa inizia a scivolare,
  - la velocità della massa nel punto B, alla fine del piano inclinato.

Nella [*scheda A*] è illustrata la rappresentazione del problema: poiché le grandezze trattate sono vettoriali, risulta opportuno scegliere un riferimento cartesiano con un asse parallelo al piano inclinato e orientato concordemente al verso del moto (*direzione tangenziale*) e l'altro asse normale al piano (*direzione normale*) con verso dal piano verso il corpo per il [*diagramma di corpo libero*] relativo al problema.

Poiché il moto avviene in presenza del campo gravitazionale terrestre, la massa m è sottoposta all'azione della forza peso (grandezza vettoriale con modulo P = mg, essendo g l'accelerazione di gravità g ~ 10 m/s^2 e direzione normale all'orizzontale BC). Scomponendo la forza peso rispetto agli assi del riferimento si hanno le due componenti [*scheda B*]

$$P_t = mg\sin\theta \qquad\qquad P_n = mg\cos\theta$$

- **A causa dell'interazione corpo/piano inclinato, la massa m esercita sul piano scabro un'azione rappresentata dalla forza P_n. Per il principio di azione/reazione, il piano reagisce alla sollecitazione con una forza di modulo uguale a P_n, ma di verso opposto e tale forza è detta *reazione normale***

$$\vec{N} = -\vec{P}_n$$

$$N = P_n = mg\cos\theta$$

- **La misura dell'interazione corpo/piano inclinato durante il moto è descritta da una forza F_d detta [*forza di attrito dinamico*] e nella [*scheda C*] si ha la rappresentazione.**

$$F_d = f_d N = f_d mg\cos\theta$$

e nella [scheda C] si ha la rappresentazione.

La II legge della dinamica enuncia che

$$\boxed{\sum_k \vec{F}_k = m\vec{a}}$$

ossia la somma vettoriale (o risultante) di tutte le forze applicate ad m è proporzionale alla variazione temporale di moto (o accelerazione) e la massa ha il significato di inerzia, ossia la massa tende a mantenere il suo stato iniziale di moto. Considerando le due componenti della equazione rispetto agli assi del riferimento e imponendo che la massa non si stacchi mai dal piano inclinato sul quale scivola, si nota che le due componenti dell'accelerazione sono:

- **la *componente tangenziale* a_t sempre non nulla (infatti il moto avviene proprio lungo tale direzione);**
- **la *componente normale* a_n sempre nulla a causa del vincolo di appoggio.**

Analiticamente si ottengono le due equazioni

$$\text{direzione}\begin{cases}\text{tangenziale}: P_t - F_d = ma_t = ma \\ \text{normale} \quad : N - P_n = a_n = 0\end{cases}$$

dalle quali si ricava [*scheda D*]

$$N = P_n = mg\cos\theta \qquad\qquad P_t - F_d = ma$$

$$F_d = f_d N = f_d mg\cos\theta \qquad\qquad mg\sin\theta - f_d mg\cos\theta = ma$$

ed il valore dell'accelerazione con la quale la massa m scende lungo il piano inclinato vale

$$(1) \qquad \boxed{a = g\left(\sin\theta - f_d\cos\theta\right)}$$

- l'accelerazione è direttamente correlata a quella di gravità (si è in presenza del campo gravitazionale terrestre);
- se l'attrito fra corpo e piano inclinato fosse trascurabile (coefficiente di attrito nullo), l'accelerazione sarebbe

$$(2) \qquad f_d = 0 \quad \rightarrow \quad a = g\sin\theta$$

- se l'angolo θ valesse 90°, il moto sarebbe lineare verticale con a = g e non avrebbe senso parlare di interazione massa/piano inclinato;

– nel caso (1), se l'accelerazione si annullasse si avrebbe un moto lineare uniforme che avverrebbe quando

$$(3) \qquad a = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan f_d$$

Esempio numerico: con i valori m = 100 kg, θ = 30°, f_d =0.5, g $\cong$ 10 m/s^2 , dalla (1) si ottiene a $\cong$ 0.7 m/s e dalla (3) $\theta \cong$ 26.6°.

- La determinazione della velocità v_B, con la quale la massa m arriva alla fine del piano inclinato (punto B), è fattibile applicando il teorema dell'energia cinetica: il [*lavoro*] complessivo delle forze applicate alla massa che scende è uguale alla differenza di [*energia cinetica*] calcolata al tempo finale t (punto B) ed al tempo iniziale t = 0 (punto A)

$$L_{AB} = T_B - T_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta T$$

Ricordando la definizione di lavoro compiuto da una forza e delle proprietà analitiche del prodotto scalare, la determinazione di L_{AB} si riduce unicamente al calcolo di due contributi:

– quello della componente tangenziale della forza peso che, essendo parallela alla spostamento AB, ha segno positivo

$$L_{P_t} = +P_t\,\overline{AB} = mg\sin\theta\,\overline{AB} = mg\,\cancel{\sin}\theta\,\frac{h}{\cancel{\sin}\theta} = mgh$$

- quello della forza di attrito dinamico che, essendo antiparallela con lo spostamento AB, ha segno negativo

$$L_{F_d} = -F_d\,\overline{AB} = f_d mg\cos\theta\,\overline{AB} = f_d mg\cos\theta\,\frac{h}{\sin\theta} = f_d mg\cos\theta\, h\cot\theta$$

Sostituendo tali valori nella relazione del lavoro, si ricava

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh\left(1 - f_d\cot\theta\right)}}$$

Se, ad esempio, la velocità iniziale fosse v_0 = 0.4 m/s, per h = 1 m e con i valori precedenti del coefficiente di attrito e dell’angolo, si otterrebbe

$$v_B \simeq 1.7\,m/s$$

Osservazioni:

- il risultato non è ottenibile per via puramente cinematica a causa del coefficiente di attrito;
- se f_d fosse nullo

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

e tale risultato è equivalente a quanto si otterrebbe considerando una caduta puramente verticale della massa (da A verso C) con un dislivello percorso di valore h;

- **la presenza della forza di attrito non permette l'applicazione della conservazione dell'energia meccanica né il calcolo del lavoro come differenza di energia potenziale iniziale e finale.**

Considerazioni operative sulla risoluzione di un esercizio di fisica

- **Un problema fisico, per quanto complesso, è descrivibile attraverso una serie di concetti elementari correlati coerentemente fra loro. Tali concetti sono l'equivalente dei noti mattoncini "Lego"® il cui assemblaggio, rispettando la logicità degli innesti, conduce ad una costruzione via via sempre più complessa. Pertanto, l'applicazione di singoli principi fisici, logicamente interconnessi fra loro, permetterà una descrizione analitica con articolata struttura logica.**
- **Nel caso di problemi inerenti la dinamica di un corpo puntiforme, è importante schematizzare il processo di risoluzione in fasi successive e precisamente:**
  - **definizione di un sistema di riferimento;**
  - **rappresentazione grafica di tutte le forze agenti [*diagramma di corpo libero*];**

- **applicazione di opportune relazioni, atte alla descrizione coerente di quanto trattato, per la rappresentazione in forma letterale della grandezza fisica;**
- **verifica dimensionale del risultato conseguito;**
- **calcolo del valore della grandezza fisica ed determinazione della precisione numerica della stessa.**

- **In alcuni casi, al fine di utilizzare strumenti analitici con una maggiore flessibilità e potenza di calcolo, è necessario l'uso di quella parte della [*analisi matematica*] conosciuta storicamente come calcolo differenziale e integrale. Tali strumenti implicano la padronanza di tecniche che verranno acquisite nei corsi universitari.**